



CEU

*Universidad  
San Pablo*

# Tema 1: Vectores y Matrices

Curso 2016/2017

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Madrid

# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

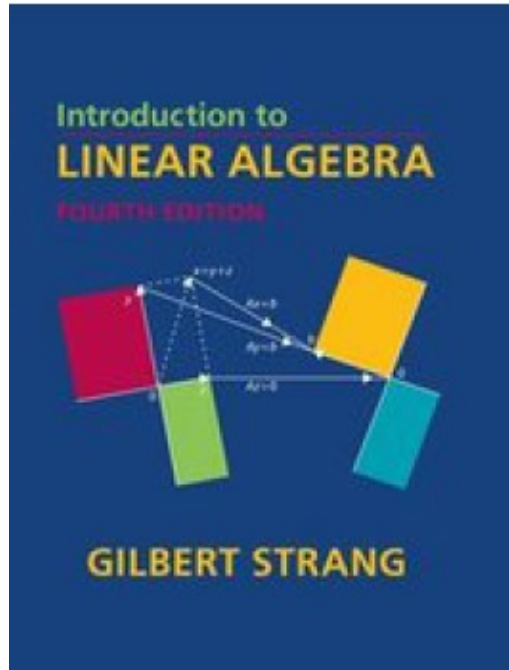
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

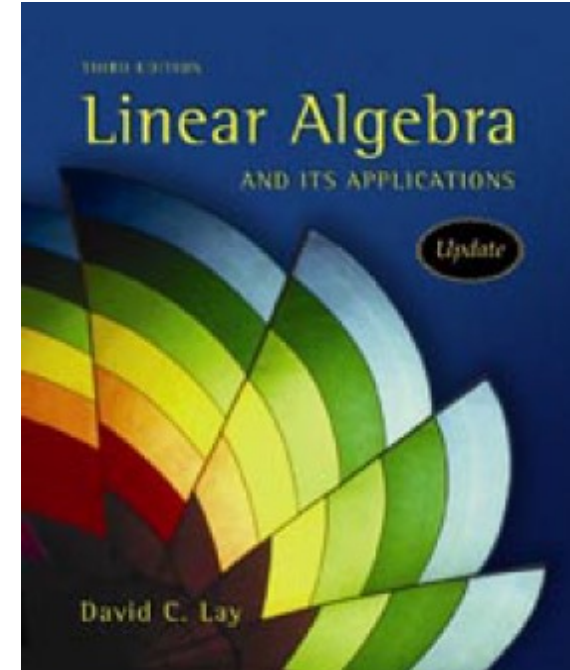
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Referencias



Strang G. *Introduction to linear algebra* (4th ed). Wellesley Cambridge Press



Lay D. *Linear algebra and its applications* (3rd ed). Pearson (2006).

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Reseña histórica

- Los vectores fueron desarrollados durante el siglo XIX por matemáticos y físicos como *Carl Friedrich Gauss (1799)*, *William Rowan Hamilton (1837)*, y *James Clerk Maxwell (1873)*
- Herramienta para la representación de **números complejos** y para realizar **razonamiento geométrico**
- El álgebra moderno fue formalizado por *Josiah Willard Gibbs (1901)*, que era profesor en Yale



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

# Índice de contenidos

- **Vectores y operaciones básicas**
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# ¿Qué es un vector?

- Informalmente, un **vector** es una colección ordenada de  $n$  números del mismo tipo. Decimos que tiene  $n$  componentes  $(1, 2, \dots, n)$

## Ejemplos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$$

Es una colección de tres números enteros

$$\begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

Es una colección de dos números racionales

## Octave - Matlab

```
[-1; 0; 1]
```

```
[-1.1; 1.1]
```

```
[-1.1; sqrt(2)]
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Vectores en $\mathbb{R}^2$

- Una matriz con una sola columna se denomina **vector columna** o simplemente **vector**
- Ejemplos de vectores con 2 entradas son:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  puede ser cualquier número real.

- Al conjunto de todos los vectores con 2 entradas se le denomina  $\mathbb{R}^2$
- Dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  son **iguales** si y sólo si sus correspondientes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

- En  $\mathbb{R}^3$ , los vectores tienen 3 entradas:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Al conjunto de todos los vectores con 3 entradas se le denomina  $\mathbb{R}^3$

- En  $\mathbb{R}^n$ , los vectores tienen n entradas:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Al conjunto de todos los vectores con n entradas se le denomina  $\mathbb{R}^n$

- Al vector cuyos componentes son todos cero se le denomina Vector Cero.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





# Traspuesta de un vector

- Distinguiremos entre **vector columna (v)** y **vector fila (w)**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = (w_1 w_2 \dots w_n)$$

- En el primer caso, decimos que **v** es un vector de **n x 1 posiciones**, mientras que en el segundo caso, decimos que **w** es un vector de **1 x n posiciones**.

Ejemplos

Octave

Cartagena99

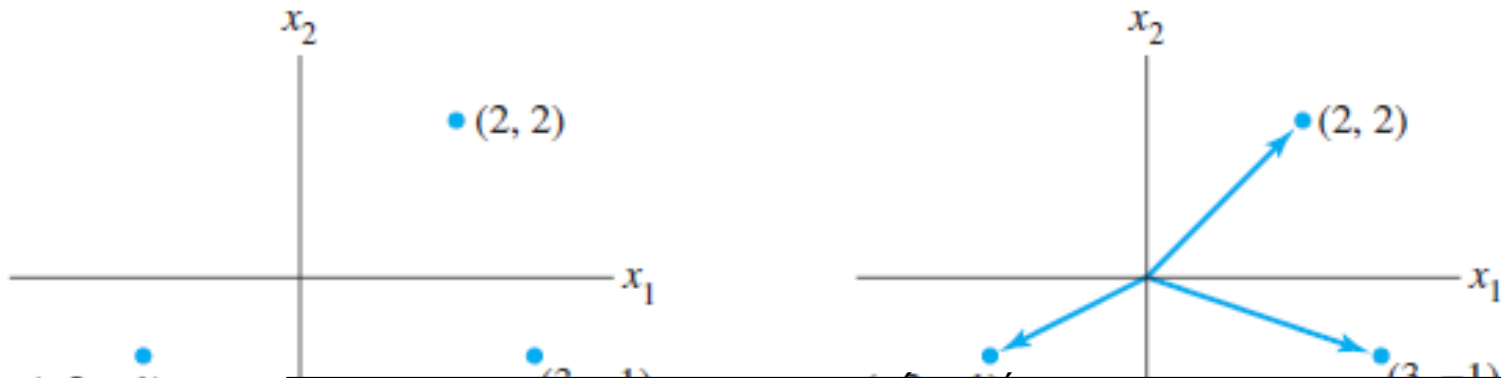
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Representación gráfica (descripción geométrica)

- En  $\mathbb{R}^2$ :
  - Si consideramos un sistema de coordenadas rectangular (plano), cada punto viene determinado por un par ordenado de números (punto geométrico)  $\rightarrow$   $(a, b)$
  - Se puede identificar el punto  $(a,b)$  con el vector columna  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
  - Origen:  $(0, 0)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

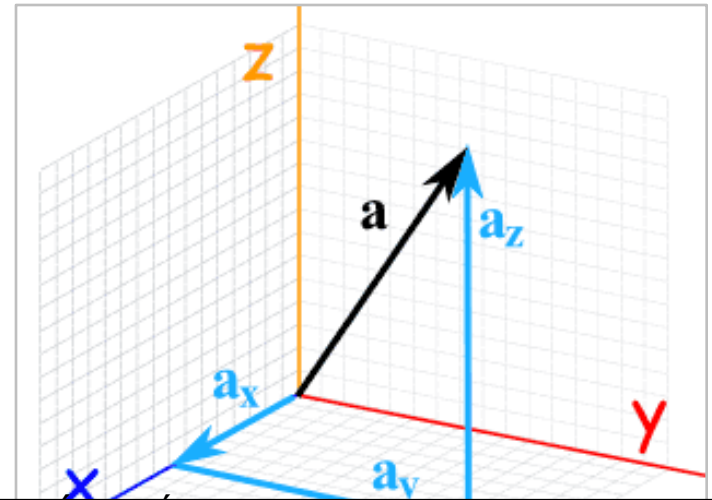
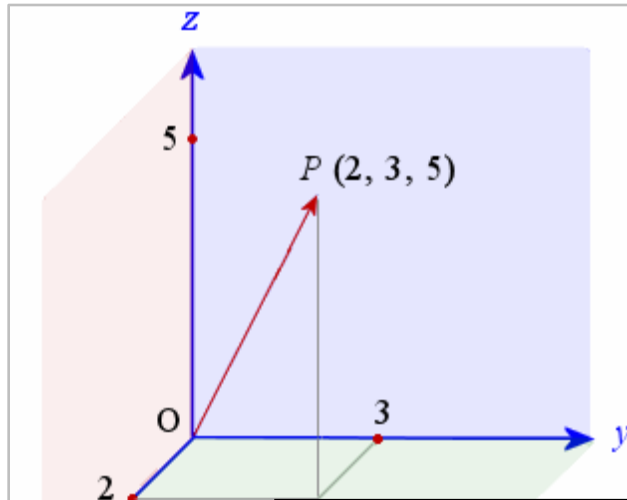
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Representación gráfica (descripción geométrica)

- En  $\mathbb{R}^3$ :
  - Geométricamente, se representa como un punto o una flecha en un espacio de coordenadas tridimensional
  - **Origen:** (0, 0, 0)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Suma de vectores

- Dados dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , la **suma** de los dos vectores ( $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ) se obtiene sumando los valores que ocupan el mismo orden dentro de los vectores

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ -2 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} & & \mathbf{v} \qquad \qquad \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array}$$

Octave

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Suma de vectores

- De manera general, la **suma de dos vectores**  $\in \mathbb{R}^n$ , se define como:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} \quad u + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \dots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- Nota:** dos vectores se pueden sumar si y solamente si son del mismo tipo (vectores fila o vectores columna)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

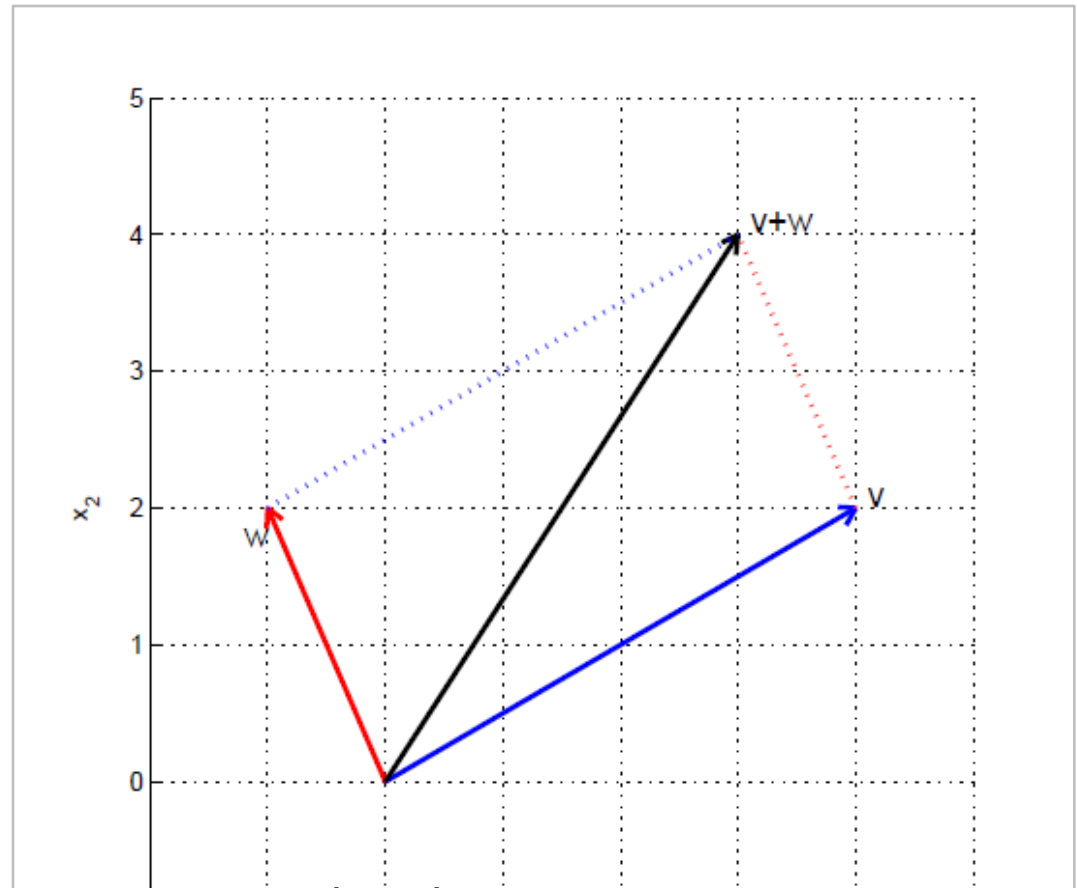
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Suma de vectores – Interpretación geométrica

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u + w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Producto por un escalar

- Dado un vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  y un número real  $c$ , la **multiplicación escalar** de  $\mathbf{u}$  por  $c$ , es el **vector  $c\mathbf{u}$**  obtenido al multiplicar cada entrada de  $\mathbf{u}$  por  $c$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c = 5$$

$$c\mathbf{u} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Octave

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Producto por un escalar

- De manera general, dado un **vector**  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  y un **escalar**  $c$ , la **multiplicación** de  $c$  por  $\mathbf{v}$  se define como:

$$c\mathbf{v} = \begin{pmatrix} cV_1 \\ cV_2 \\ \dots \\ cV_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$2 \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

Octave

$$2 * [-1.1; 1.1]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Producto por un escalar – Interpretación geométrica

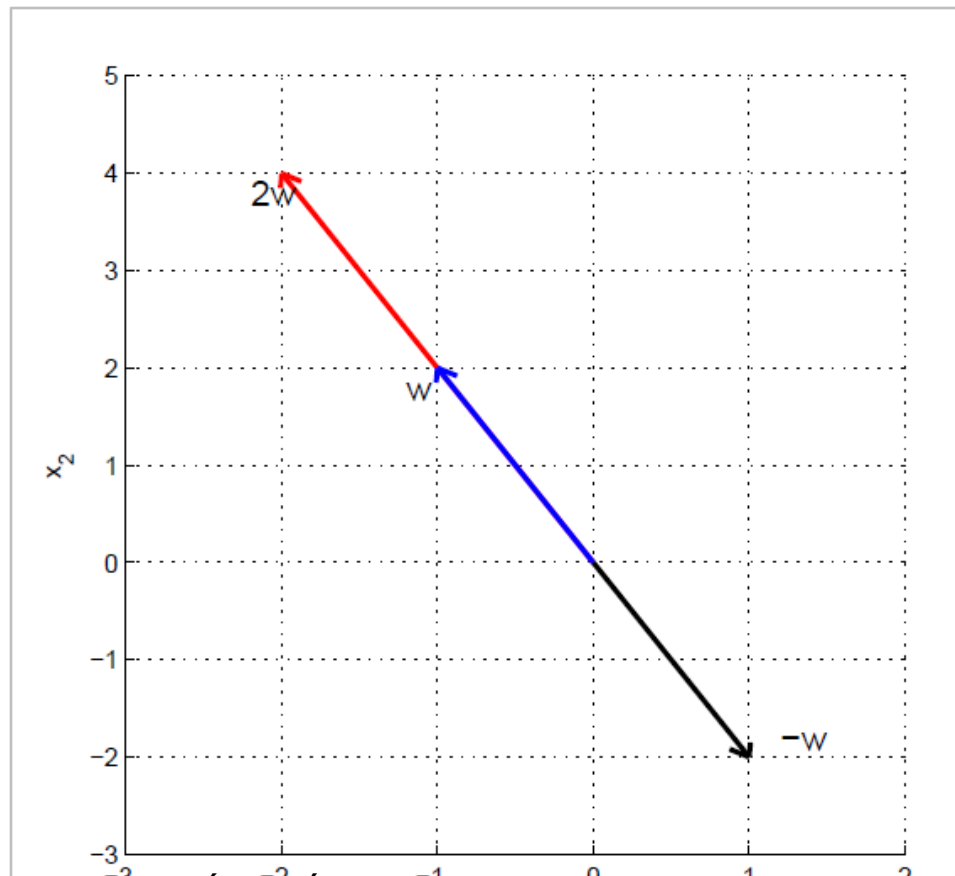
$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2w = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la forma de todos los vectores  $w$  escalados de la forma  $cw$ ?

- Si  $w = 0$ , entonces es un punto (0)
- Si  $w \neq 0$ , entonces es la recta que pasa por el 0 y  $w$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Ejemplo de combinación de operaciones

## Ejemplo

Dados los vectores  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ , calcular  $4\mathbf{u}$ ,  $(-3)\mathbf{v}$ , y  $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Cartagena99

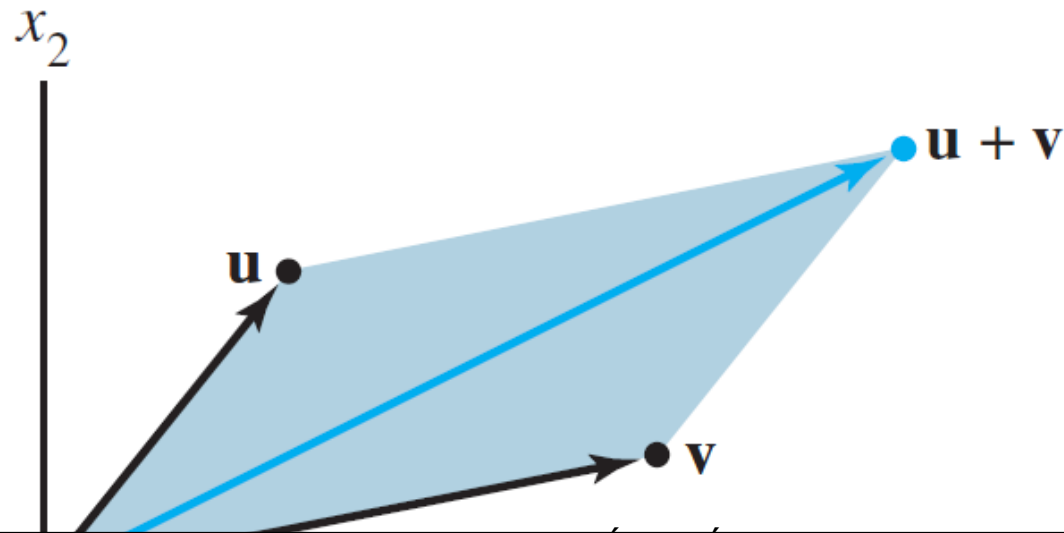
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Regla del paralelogramo para la suma

- Si dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  son representados como puntos en el plano, entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  corresponde al cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{0}$ , y  $\mathbf{v}$



Cartagena99

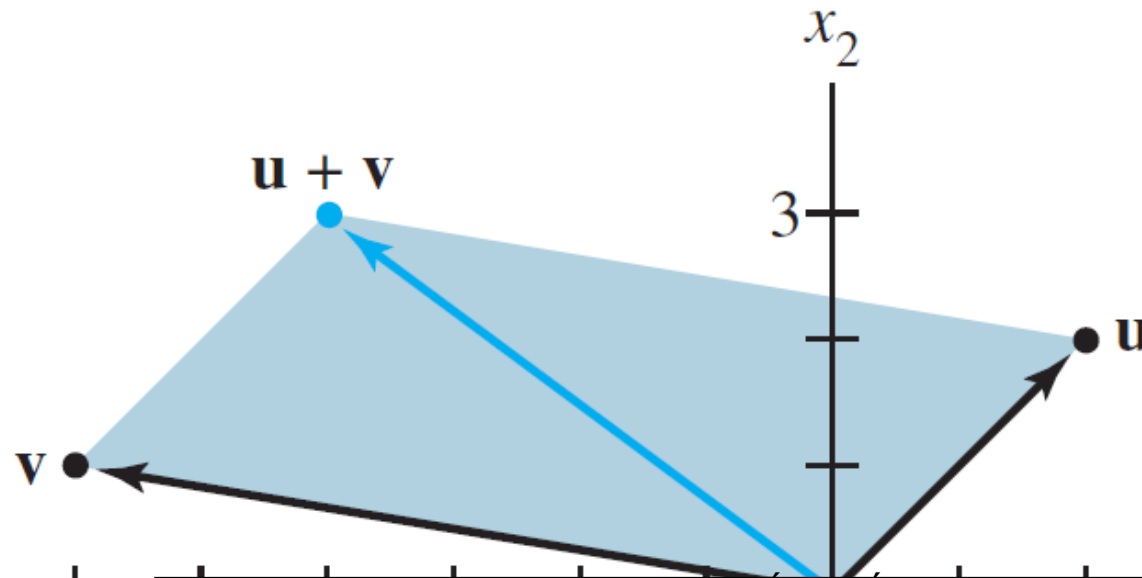
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Regla del paralelogramo para la suma

- **Ejemplo:** dibujar los vectores  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ , y  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

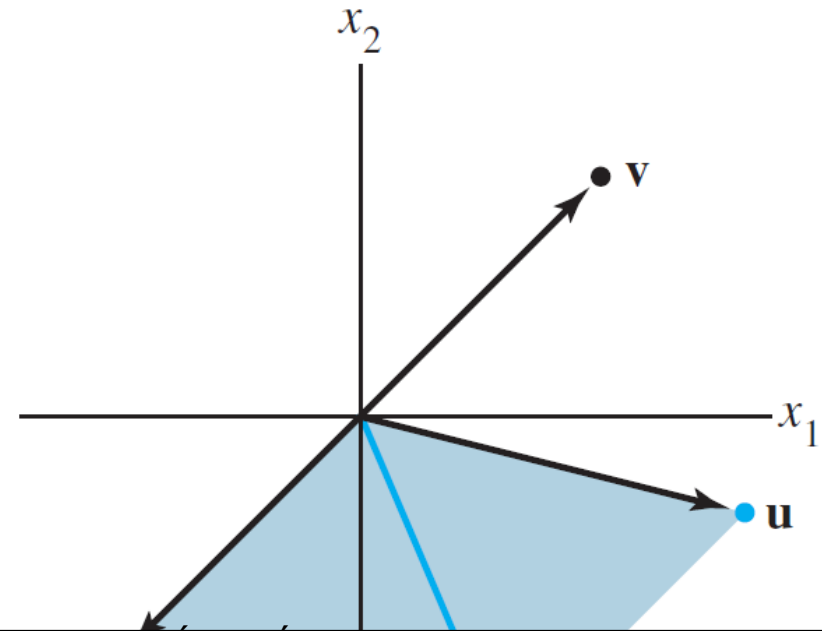
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Resta de vectores

- Dados 2 vectores **u** y **v**, la resta de ambos es equivalente a sumar al primero el simétrico/opuesto del segundo

$$u - v = u + (-1)v$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



CEU

# Propiedades algebraicas en $\mathbb{R}^n$

- Para todo vector  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  y todo escalar  $c$  y  $d$ , se verifica:

## Respecto a la suma de vectores

(i)  $u + v = v + u$

(ii)  $(u + v) + w = u + (v + w)$

(iii)  $u + 0 = 0 + u = u$

(iv)  $u + (-u) = -u + u = 0$

## Respecto a la suma de vectores y producto escalar

## Respecto al producto escalar

(vii)  $c(du) = (cd)u$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- **Combinaciones lineales**
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Combinación lineal

- Dado un conjunto de  $p$  vectores  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) \in \mathbb{R}^n$  y un conjunto de  $p$  escalares  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ , se denomina **combinación lineal** al vector  $\mathbf{y}$  definido como:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^p c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

Ejemplos: dados los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



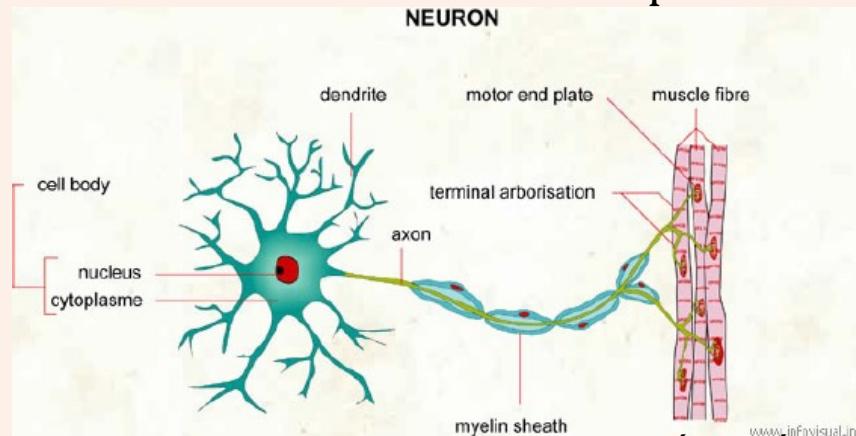
# Combinación lineal

## Ejemplo: modelización de una neurona

Un modelo muy básico y aceptado de la actividad de una neurona viene dado por:

$$output = f\left(\sum_i peso_i \cdot entrada_i\right)$$

donde  $f(x)$  no es una función lineal. Este modelo se usa para modelizar redes de neuronas artificiales.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Combinación lineal

## Ejemplo

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

## Octave

format rat

$$2 * [1; 3] + 5 * [2; 1]$$

## Ejemplo

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} \\ 5 \end{bmatrix}$$

## Octave

format rat

$$1/2 * [-1; 1] - 2/3 * [2; 2]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

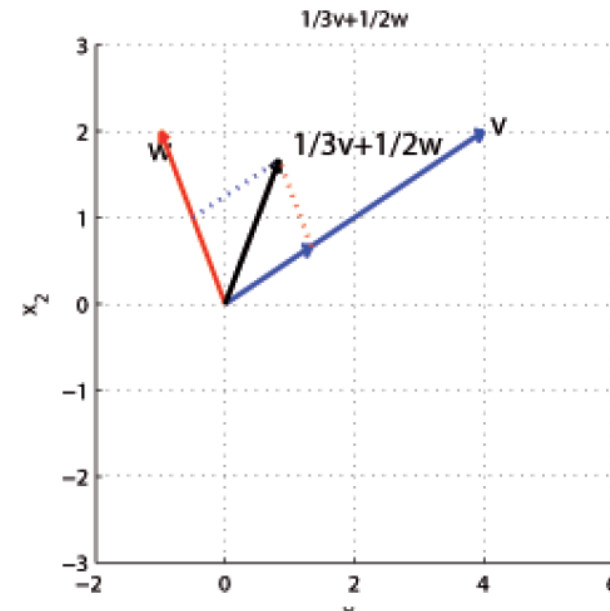
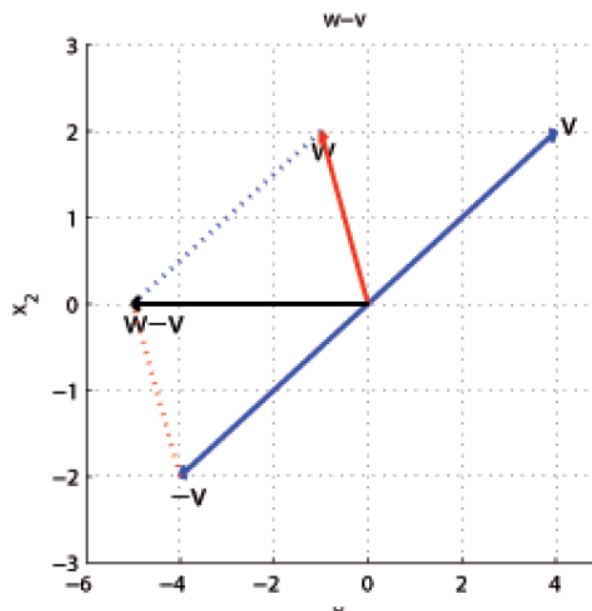
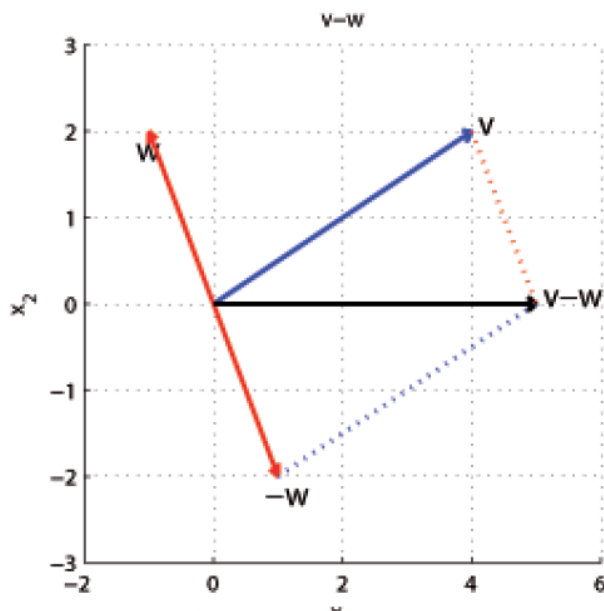
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Combinación lineal

## Ejemplo

Dados  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , calcular y representar gráficamente  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ ,  $\frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



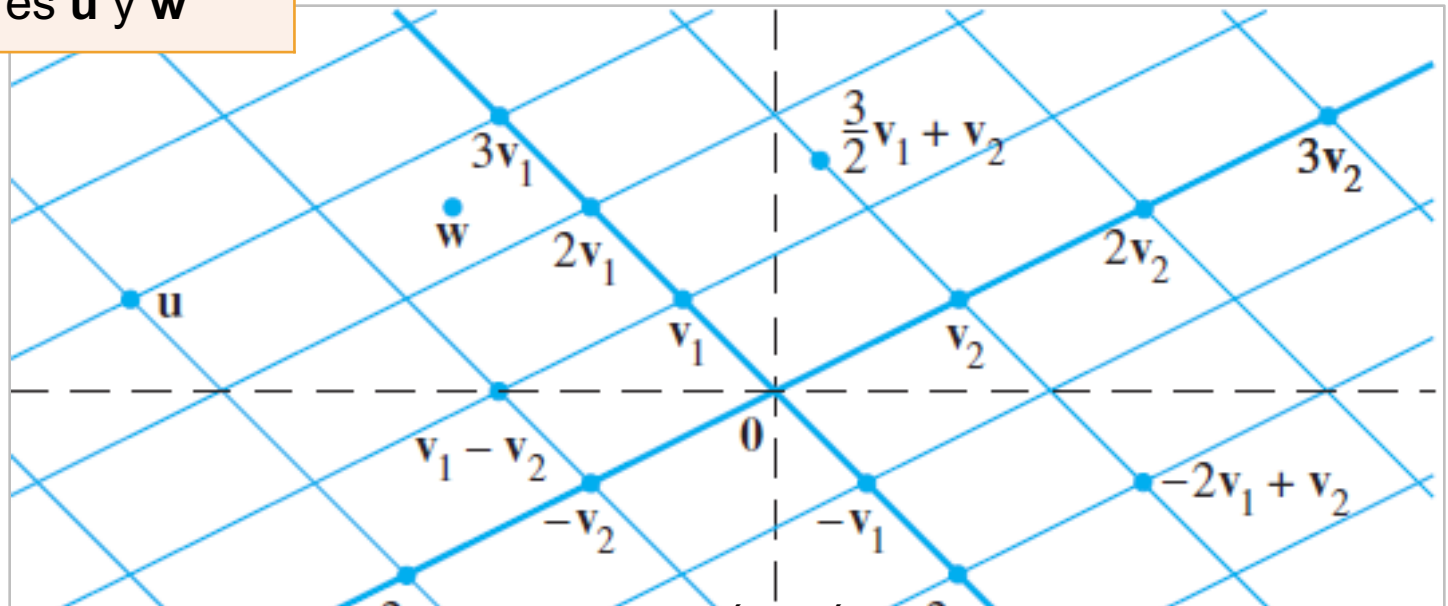
# Combinación lineal

## Ejemplo

Dados  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  
estimar las combinaciones lineales  
para generar los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{w} = \frac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

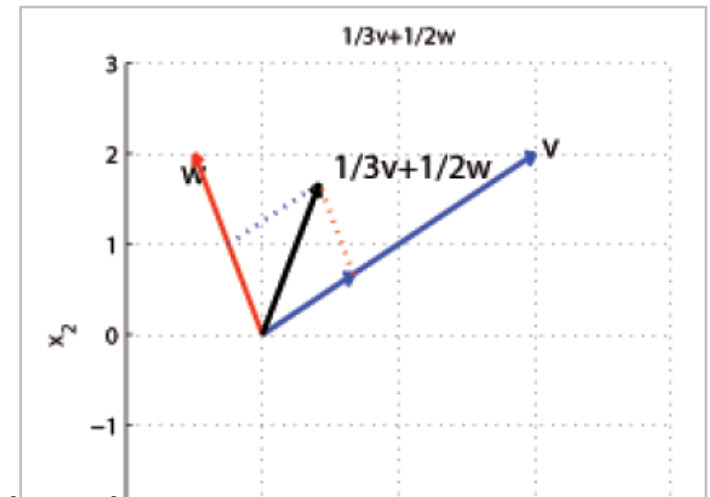
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Combinación lineal

- ¿Qué forma tienen todas las combinaciones lineales de la forma  $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ ?
  - Si los dos vectores no son colineales (es decir,  $\mathbf{w} \neq k\mathbf{v}$ ), entonces es un plano que pasa por  $\mathbf{0}$ , y contiene a  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

El plano generado por  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  es el conjunto de todos los vectores que pueden ser generados como una combinación lineal de ambos vectores



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Combinación lineal

- El **subespacio generado** (*spanned subspace*) por los vectores  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) \in \mathbb{R}^n$  es el conjunto de todos los vectores que pueden ser expresados como una combinación lineal de dichos vectores
- Formalmente se define como:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \rangle = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\} \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p\}$$

## Ejemplo

Asumiendo que todos los vectores son linealmente independientes:

- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$  es una línea recta

## Propiedad

$$\mathbf{0} \in \text{Span}\{\cdot\}$$

Cartagena99

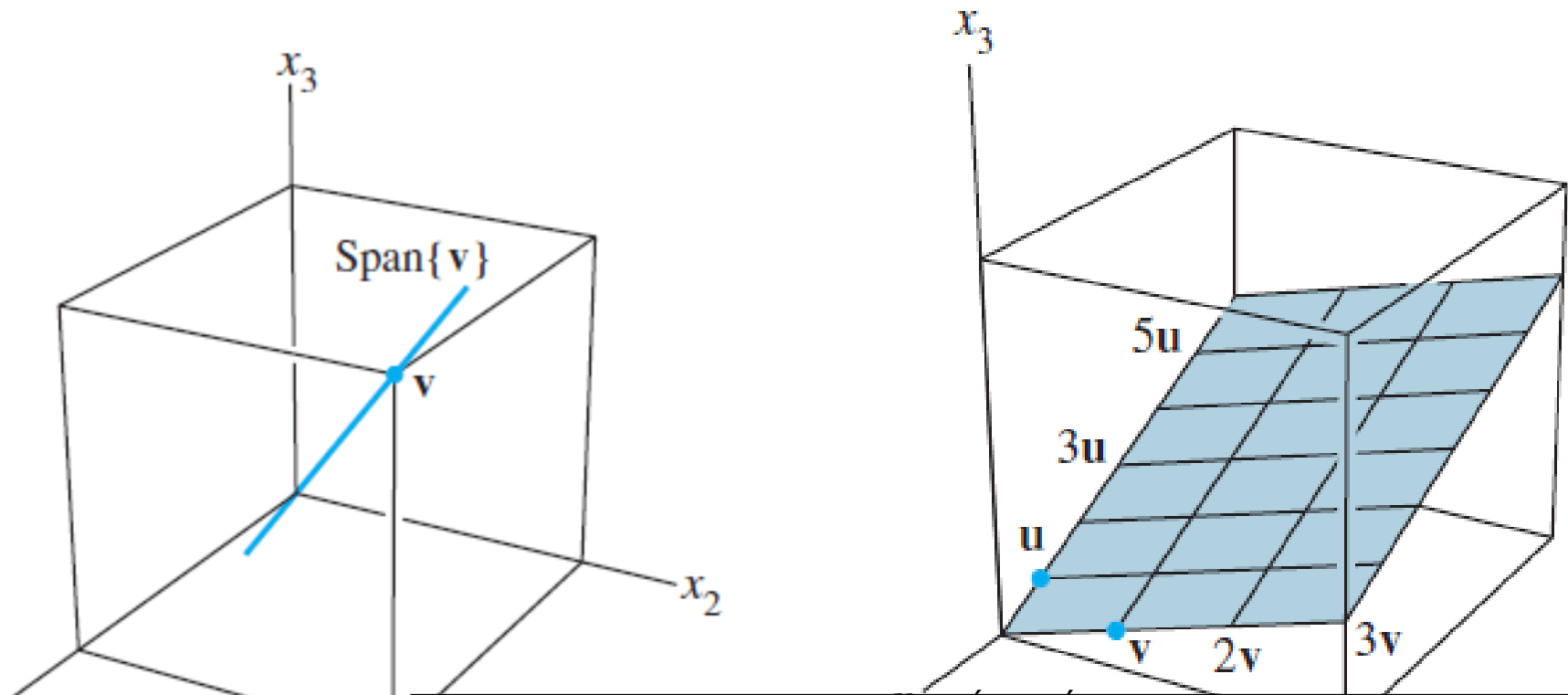
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Combinación lineal

Descripción geométrica del  $\text{Span}\{v\}$  y el  $\text{Span}\{u, v\}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



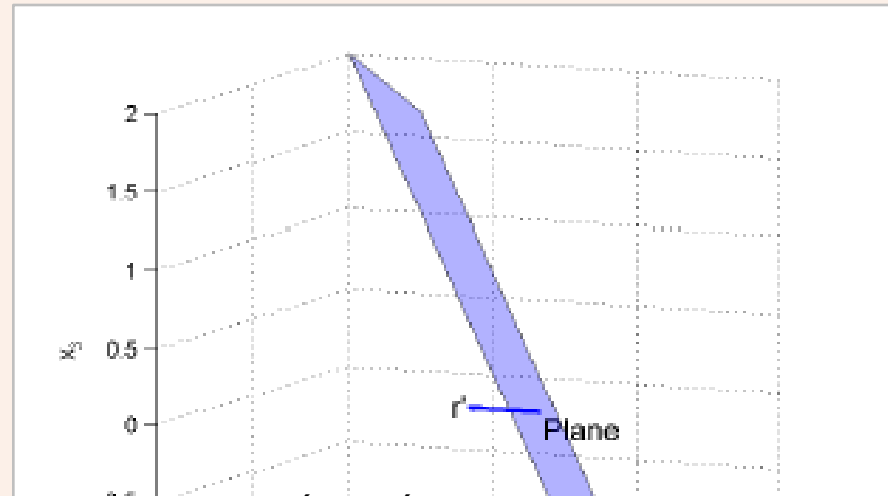
# Combinación lineal

## Fuera del plano

Dado  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$ , las combinaciones lineales de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  forman un plano en 3D. Todos los puntos pertenecientes a este plano son de la forma:

$$\Pi = \{ r \mid r = c(1, 1, 0) + d(0, 1, 1) \quad \forall c, d \in \mathbb{R} \} = \{ r = (c, c + d, d) \quad \forall c, d \in \mathbb{R} \}$$

Por tanto, el vector  $\mathbf{r}' = (0, 1, 0) \notin \Pi$  y está fuera del plano.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

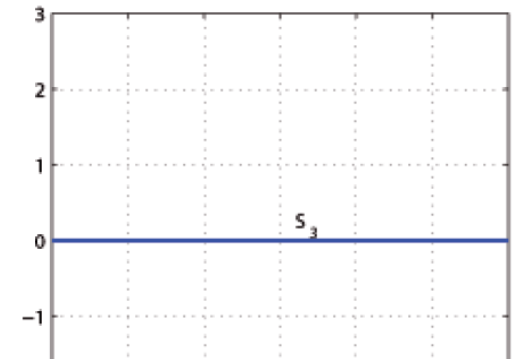
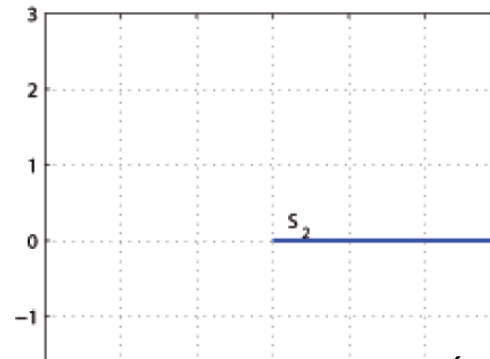
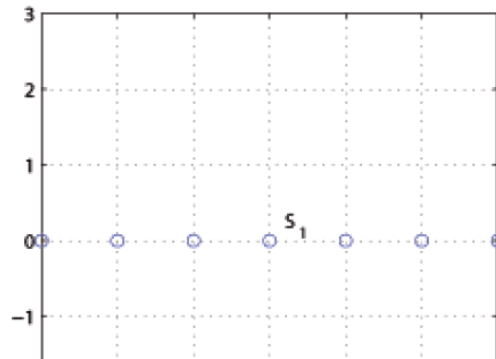


# Combinación lineal

## Conjuntos de puntos

Dado  $\mathbf{v} = (1, 0)$ ,

1.  $S_1 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{Z} \}$  es un conjunto de puntos
2.  $S_2 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{R}^+ \}$  es una semilínea
3.  $S_3 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{R} \}$  es una línea



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

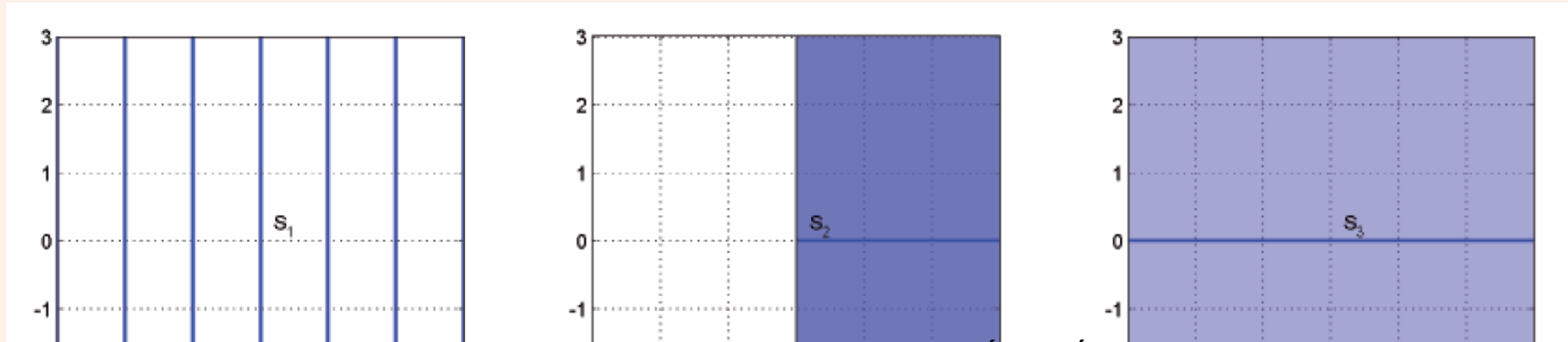
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Combinación lineal

## Conjuntos de puntos

Dado  $\mathbf{v} = (1, 0)$  y  $\mathbf{w} = (0, 1)$ ,

1.  $S_1 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c \in \mathbb{Z}, \forall d \in \mathbb{R} \}$  es un conjunto de líneas
2.  $S_2 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall d \in \mathbb{R} \}$  es un semiplano
3.  $S_3 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c, d \in \mathbb{R} \}$  es un plano



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Combinación lineal

## Combinación de coeficientes

Dado  $\mathbf{v} = (2, -1)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 2)$  y  $\mathbf{b} = (1, 0)$ , encontrar un valor para  $c$  y  $d$  tal que  $\mathbf{b} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$

### Solución:

Necesitamos encontrar un  $c$  y un  $d$  tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c - d \\ 2d - c \end{bmatrix}$$

Esto nos da un sistema simple de ecuaciones:

$$2c - d = 1$$

$$2d - c = 0$$

Octave

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Ejercicios

- Del capítulo 1, sección 3 de *Lay (4th ed.)*:
  - Ejercicio 1.3.1
  - Ejercicio 1.3.2
  - Ejercicio 1.3.3
  - Ejercicio 1.3.7
  - Ejercicio 1.3.8
  - Ejercicio 1.3.25
  - Ejercicio 1.3.27
  - Ejercicio 1.3.29
  - Ejercicio 1.3.31

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- **Producto escalar – interior – interno – punto**
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

# Producto escalar de 2 vectores

- **Producto escalar** – interior – interno – punto (Inner – dot product)
- Dados dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , el producto escalar entre ambos se define como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

- Matemáticamente, el concepto de producto escalar es mucho más general. La definición anterior es una particularización para vectores  $\in \mathbb{R}^n$ . Aunque es el más común, no es el único.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Producto escalar de 2 vectores

## Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 7$$

## Octave

dot([4; 2], [-1; 2])

dot([-3; 4], [-2; -1])

dot([2; -3; 1], [3; -1; -2])

## Propiedad

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- **Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios**
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU



# Norma y longitud de un vector

- La **longitud** o **norma** de un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  es un escalar no negativo  $\|\mathbf{v}\|$  definido como:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}; \text{ y } \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

- En el caso particular de trabajar con el producto escalar anteriormente presentado, esta definición se reduce a:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Cartagena99

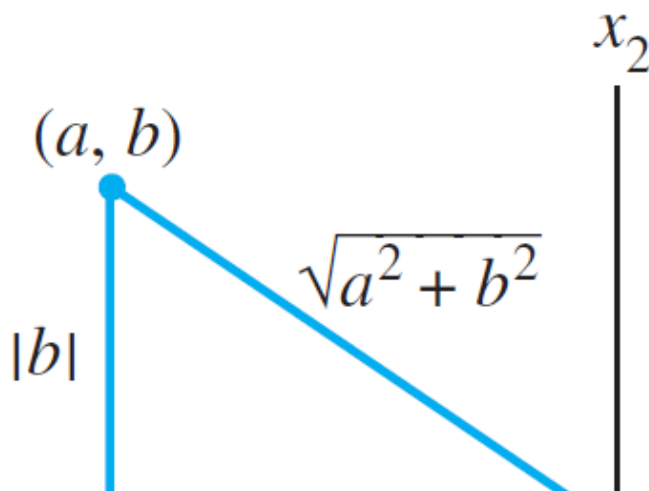
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Norma y longitud de un vector

- En particular para  $\mathbb{R}^2$ , si tenemos  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  e identificamos  $\mathbf{v}$  con un punto geométrico en el plano, entonces  $\|\mathbf{v}\|$  coincide con la longitud del segmento desde el origen hasta  $\mathbf{v}$  (Teorema de Pitágoras)



## Propiedades

$$\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

$$\|c \mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Norma y longitud de un vector

## Ejemplos

$$\|(3, 7)\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7,6158$$

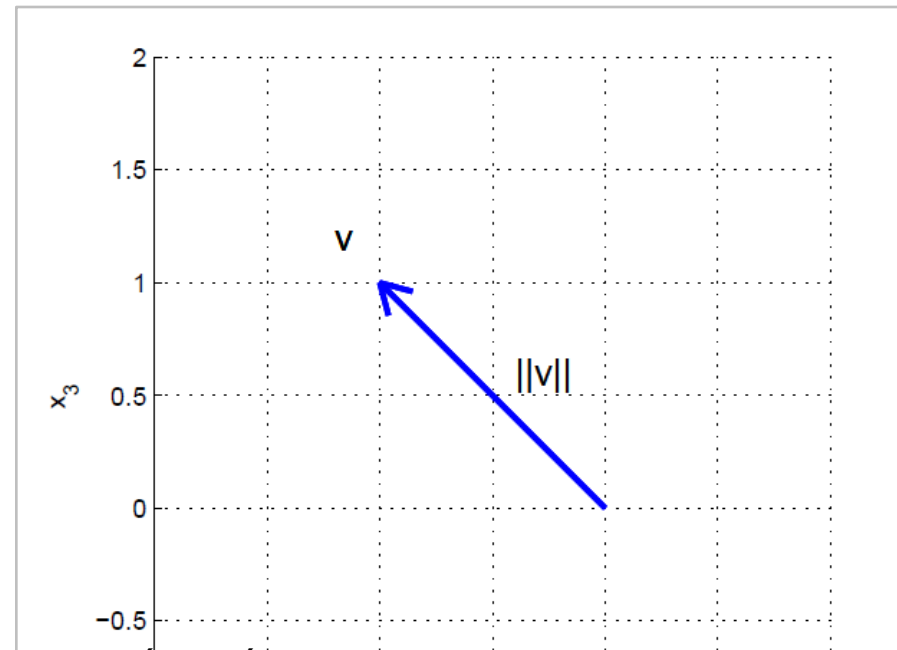
$$\|(-2, 5)\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5,3852$$

$$\|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,4142$$

Octave

`norm([3; 7])`

`norm([-2; 5])`



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Vectores unitarios

- Un vector  $\mathbf{v}$  es unitario si y sólo si  $\|\mathbf{v}\| = 1$

## Ejemplos

$$\mathbf{u} = (1, 0)$$

$$\mathbf{v} = (0, 1)$$

$$\mathbf{w} = (\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

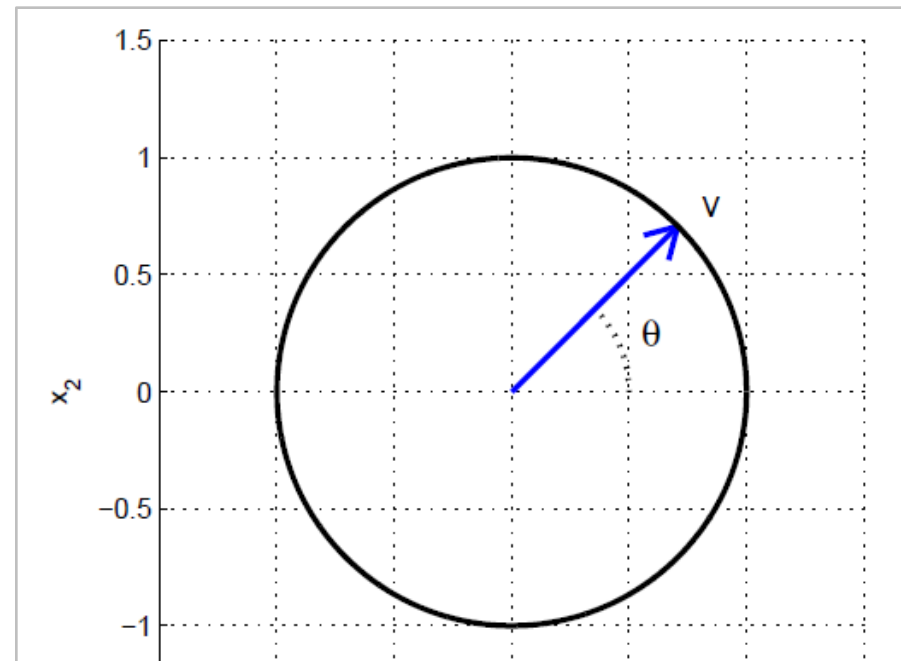
Octave

norm([1; 0])

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Construcción de un vector unitario (normalización)

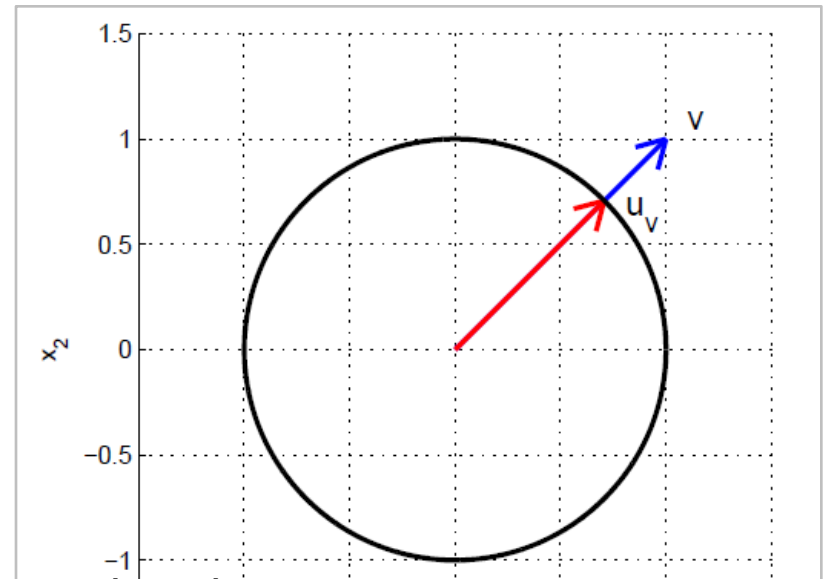
- Dado un vector  $\mathbf{v}$  (cuya norma no es nula), siempre se puede construir un vector unitario con la misma dirección de  $\mathbf{v}$  dividiendo el vector por su longitud (es decir, multiplicando el vector por  $1/\|\mathbf{v}\|$ )

$$\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

## Ejemplo

$$\mathbf{v} = (1, 1)$$

$$\mathbf{v} = (1, 1) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Construcción de un vector unitario (normalización)

## Ejemplos

Dado el vector  $\mathbf{v} = (1, -2, 2, 0)$ , encontrar el vector unitario  $\mathbf{u}$  en la misma dirección que  $\mathbf{v}$

**Solución:**

Primero calculamos la longitud de  $\mathbf{v}$ :

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 9 \quad ; \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{9} = 3$$

Después multiplicamos el vector  $\mathbf{v}$  por  $1/\|\mathbf{v}\|$ , obteniendo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{3} \mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que  $\|\mathbf{u}\| = 1$ , es suficiente con comprobar que  $\|\mathbf{u}\|^2 = 1$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

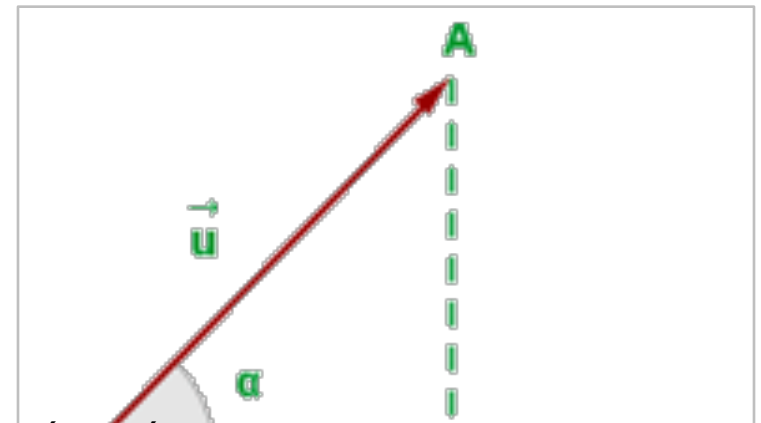
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Interpretación geométrica del producto escalar

- El **producto escalar** de dos vectores no nulos, es igual a la norma de uno de ellos por la proyección del otro sobre él
- También puede verse como el producto de las normas por el coseno del ángulo que forman los 2 vectores

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\mathbf{OA}'\|}{\|\mathbf{u}\|}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU



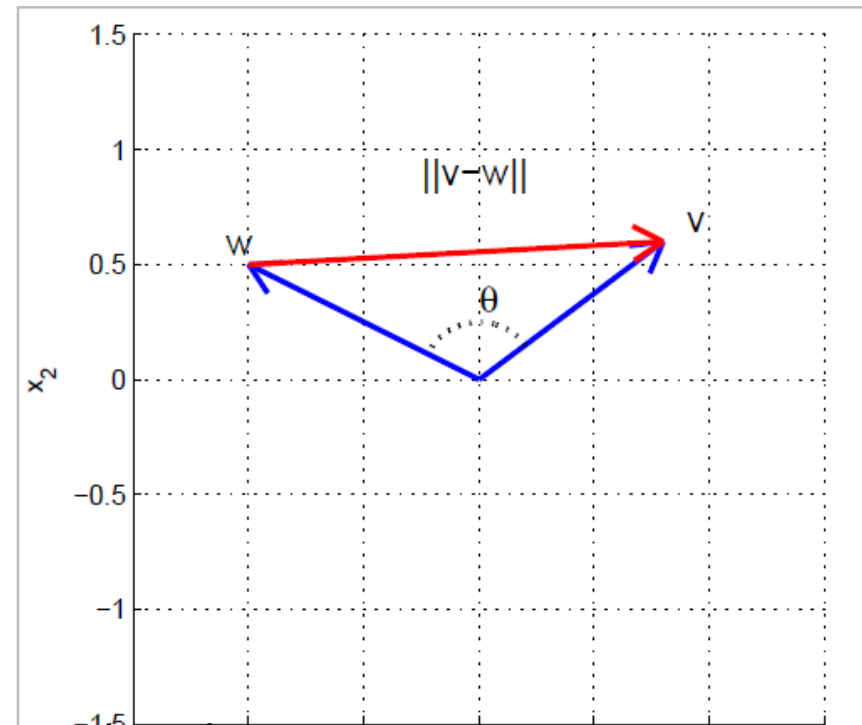
# Distancia entre vectores

- Dados dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , la **distancia** entre ambos se define como:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \triangleq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

y **ángulo** que forman entre ellos es:

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \triangleq \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \theta$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

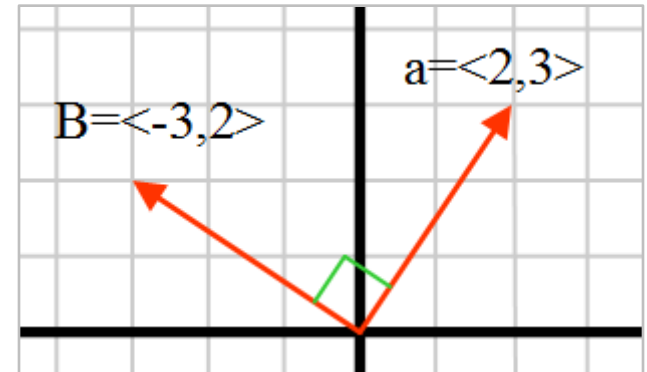
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Vectores ortogonales

- Dos vectores son **ortogonales** (perpendiculares) si y sólo si su **producto escalar es igual a 0**

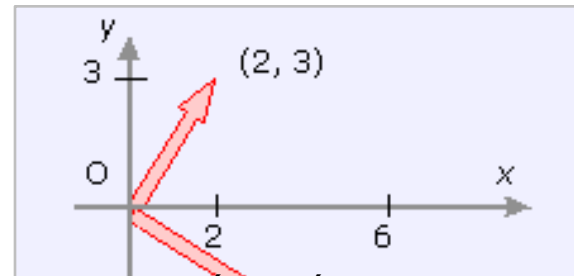
- Se representa como:

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$



- En este caso,

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\pi}{2}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Distancia y ángulos entre dos vectores

## Ejemplo

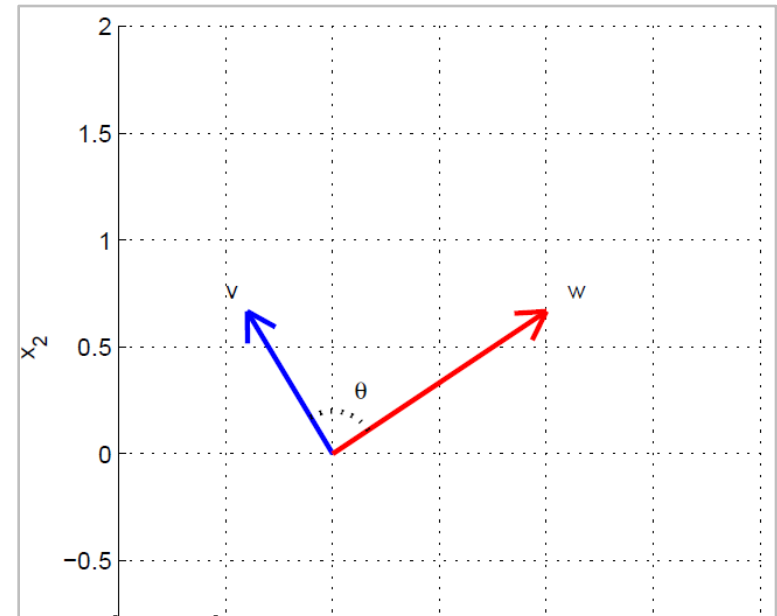
Dados  $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$  y  $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ . Calcular el ángulo formado entre los dos vectores.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{45} = 0,0444$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{15} = 0,7775$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} = 1,2019$$

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \arccos\left(\frac{\frac{2}{45}}{\frac{\sqrt{136}}{15} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}}\right) = 87,27^\circ$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Distancia y ángulos entre dos vectores

## Ejemplo

Dados  $\mathbf{v} = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,1)$  y  $\mathbf{w} = (0,1,1,0,1,1,0,1,1,0)$ .

Estos dos vectores en un espacio de 10 dimensiones son ortogonales porque:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Distancia y ángulos entre dos vectores

## Ejemplo

Buscar un vector que sea ortogonal a  $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

### Solución:

Buscamos un vector  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$  ortogonal a  $\mathbf{v}$ , es decir,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot w_1 + \frac{2}{3} \cdot w_2 \Rightarrow w_2 = \frac{3}{5} \cdot w_1$$

Por tanto, cualquier vector de la forma  $\mathbf{w} = (w_1, \frac{3}{5}w_1) = w_1(1, \frac{3}{5})$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ .

Esta es la línea que pasa por el origen y con dirección  $(1, \frac{3}{5})$ .

En particular, para  $w_1 = \frac{2}{3}$ , tenemos que  $\mathbf{w} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{5})$ , y para  $w_1 = -\frac{2}{3}$ , tenemos que  $\mathbf{w} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Teorema de Pitágoras

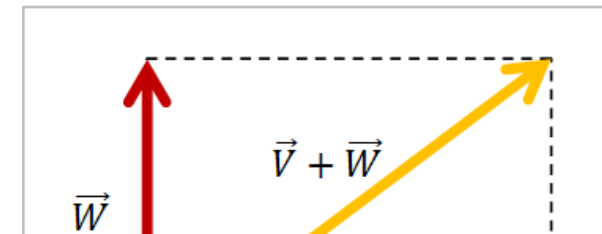
$$\text{Si } \mathbf{v} \perp \mathbf{w}, \text{ entonces } \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

Demostración:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Pero, como  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ , tenemos que  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ , y en consecuencia,



$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



# Teorema de Pitágoras

## Corolario

- Si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < \mathbf{0}$ , entonces  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
- Si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle > \mathbf{0}$ , entonces  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
- Para dos vectores unitarios,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , tenemos que  $\cos \theta = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ , y en consecuencia,  $-1 \leq \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \leq 1$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

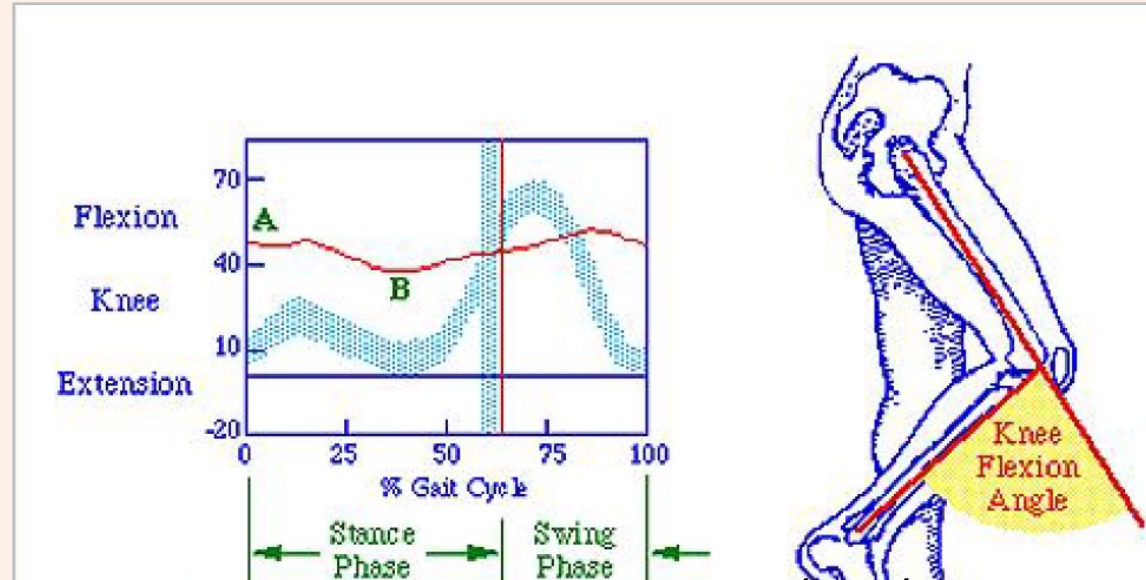


CEU

# Distancia y ángulos entre vectores

## Ejemplo

- Para calcular el ángulo de flexión de la rodilla, podemos utilizar el producto escalar entre los vectores alineados con la pierna, antes y después de la rodilla



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



# Teorema: desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Dados dos vectores  $v$  y  $w$  cualquiera se verifica que:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

- Demostración:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |\langle v, w \rangle| = \|\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\cos \alpha| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

## Ejemplo

Dados los vectores  $v = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$  y  $w = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ , sabemos que  $v \cdot w = \frac{2}{45}$ ,  $\|v\| = \frac{\sqrt{136}}{15}$ , y  $\|w\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Si verificamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Teorema: desigualdad triangular

- Dados dos vectores cualquiera,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , se verifica que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

## Demostración:

Por la definición, sabemos que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados, tenemos:

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Teorema: desigualdad triangular

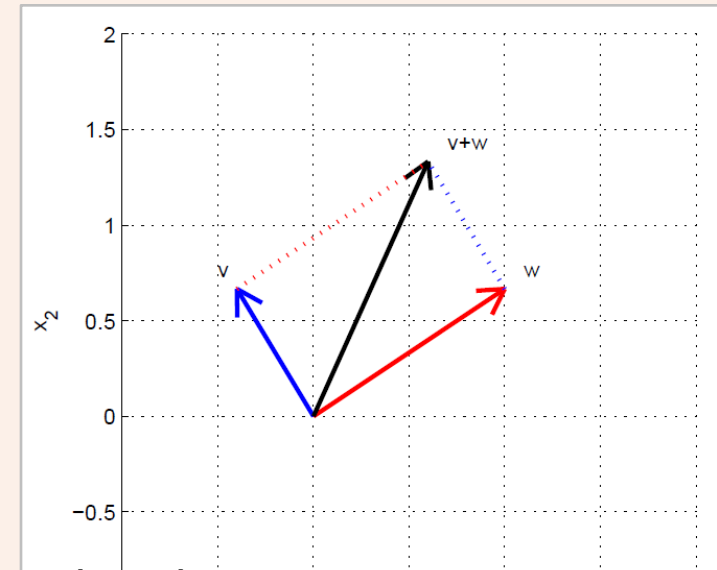
## Ejemplo

Dados los vectores  $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$  y  $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ , sabemos que  $\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{136}}{15}$ , y  $\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Si verificamos la desigualdad triangular tenemos:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{481}}{15}$$

$$\frac{\sqrt{481}}{15} \leq \frac{\sqrt{136}}{15} + \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow 1,4621 \leq 1,9793$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

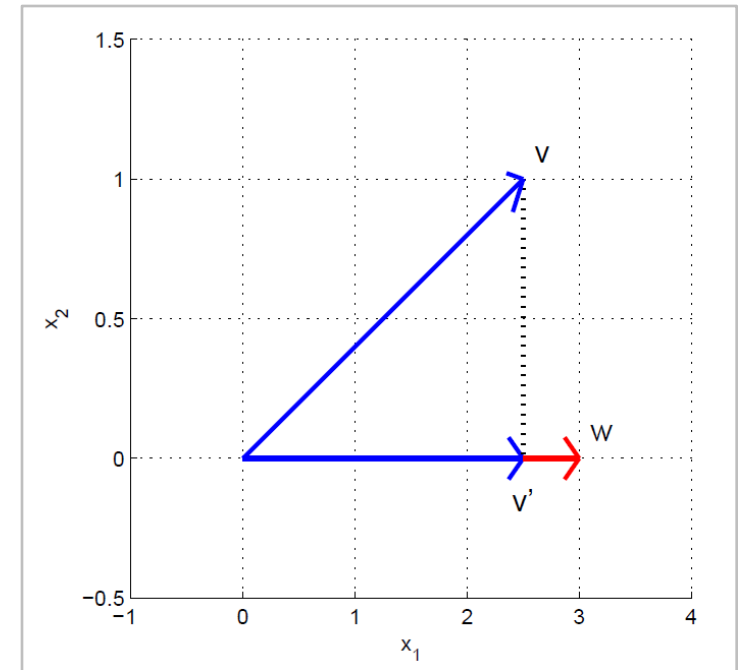
# Proyecciones ortogonales

- Consideremos la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{v}' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

- La longitud de este vector es:

$$\|\mathbf{v}'\| = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$$



## Ejemplo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- **Multiplicación por matrices**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Multiplicación por matrices

## Multiplicación de matrices como una combinación lineal

**Regla general:** una multiplicación de matrices se puede ver como una combinación lineal de las columnas de la matriz

$$A = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_p) \Rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{c}_i$$

## Multiplicación de matrices como productos escalares o punto

Una multiplicación de matrices se puede ver como el producto escalar o punto de los valores del vector con las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix}$$

## Propiedades

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Multiplicación por matrices

## Ejemplo (como combinación lineal)

Consideremos tres vectores  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Consideremos la combinación lineal:

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Se puede obtener el mismo resultado construyendo una matriz:

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Multiplicación por matrices

## Ejemplo (como productos escalares)

Se puede obtener el mismo resultado calculando  $y$  como el producto escalar de las filas de la matriz  $A$  por los valores del vector

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \langle (1, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (-1, 1, 0), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (0, -1, 1), (x_1, x_2, x_3) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

